N1. Calcul numérique

Dans ce chapitre vous trouverez l'ensemble des règles de calcul mettant en jeu les nombres au programmes du cycle 4 : les nombres décimaux, les nombres relatifs, les nombres en écriture fractionnaire, les puissances et les racines carrées (qui sont des nombres réels).
Ces règles ne sont pas à apprendre "par cœur" mais à savoir utiliser pour calculer efficacement dans des exercices portant sur d'autres notions.
Par ailleurs, nous verrons dans les cours de didactique que, dans l'apprentissage, les concepts peuvent être alternativement outils ou objets. Autrement dit, pour comprendre les nombres et les opérations, il est nécessaires de les étudier d'un côté (objet de l'enseignement) et de les faire vivre en situation de l'autre (outil de l'enseignement). Appliquer les règles de calcul aide à comprendre les concepts et la théorie qui les sous-tendent.

N1.1 Enchaînement d'opérations

N1.1.1 Priorités opératoires

Convention (Priorités opératoires)
Dans une expression, on effectue :

- d'abord **les calculs entre les parenthèses** les plus intérieures,
- puis **les multiplications et les divisions** de gauche à droite,
- et, enfin, **les additions et les soustractions** de gauche à droite.

Exemple :
$A = 7 + 2 \times (5 + 7) - 5$
$A = 7 + 2 \times (5 + 7) - 5$
$A = 7 + 2 \times 12 - 5$
$A = 7 + 2 \times 12 - 5$
$A = 7 + 24 - 5$
$A = 7 + 24 - 5$
$A = 31 - 5$

*Dans une **écriture fractionnaire**, on effectue d'abord les calculs au numérateur d'un côté, et ceux au dénominateur de l'autre, comme si les expressions au numérateur et au dénominateur étaient entre parenthèses.*

Exemple :
$B = \dfrac{13+5}{12-4} = \dfrac{28}{8} = 2,25$

N1.1.2 Vocabulaire des opérations

Définition (Vocabulaire des opérations)

Opération	Notation	Nom du résultat	a	b
Addition	$a+b$	la somme	les termes	
Soustraction	$a-b$	La différence	le premier terme	le deuxième terme
Multiplication	$a\times b$	le produit	les facteurs	
Division	$a:b\ (b\neq 0)$ $\dfrac{a}{b}\ (b\neq 0)$	le quotient	le dividende le numérateur	le diviseur le dénominateur

*Dans une soustraction on distingue les deux termes. En effet $a-b\neq b-a$. On dit que cette opération n'est pas **commutative**. C'est aussi le cas de la division.*
En revanche, l'addition et la multiplication sont des opérations commutatives.

Définition (Nom d'une expression)
C'est la dernière opération effectuée qui donne son nom à une expression.

Exemple :
- $C = 3\times(5+4)$ est un produit.
- $D = 15-[4\times(2+3)-8]$ est une différence.

Méthode : Traduire une expression par une phrase.

- $\mathbf{32+3\times 6}$
  La dernière opération effectuée est l'addition donc cette expression est une somme : la somme de 32 et de 3×6.
  3×6 est le produit de 3 par 6.
  Finalement $32+3\times 6$ est **la somme de 32 et du produit de 3 par 6**.
- $\mathbf{(32+3)\times 6}$
  La dernière opération est la multiplication donc cette expression est un produit : le produit de $32+3$ par 6.
  $32+3$ est la somme de 32 et 3.
  Finalement $(32+3)\times 6$ est **le produit de la somme de 32 et 3 par 6**.

N1.2 Nombres relatifs

N1.2.1 Définitions

Définition (Nombres relatifs)
Un **nombre relatif** est un nombre positif ou négatif.
Il peut être précédé d'un signe $+$ ou $-$.
Le nombre sans son signe s'appelle la **distance à zéro** de ce nombre.

Définition (Nombres opposés)
Deux nombres qui ont la même distance à zéro mais des signes contraires sont dits **opposés**.

Exemple :
L'opposé du nombre $-2,7$ est $+2,7$.
L'opposé du nombre 4 est -4.

N1.2.2 Opérations

Propriété (Addition de nombres relatifs)
Pour additionner deux nombres de **même signe** :

- on additionne les distances à zéro des deux nombres ;
- on donne au résultat le signe commun.

Pour additionner deux nombres de **signes contraires** :

- on soustrait la plus petite distance à zéro de la plus grande ;
- on donne au résultat le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.

Exemple :
- $(-2)+(-3)=-(2+3)=-5$
- $(-2)+(+3)=+(3-2)=1$

Propriété (Soustraction de nombres relatifs)
Soustraire un nombre relatif c'est ajouter son opposé.

Exemple :
$(-2)-(+3)=(-2)+(-3)=-5$

*Pour simplifier l'écriture dans une suite d'**additions**, on omet les parenthèses et les signes + de l'addition.*
Cela revient à n'écrire que les nombres avec leurs signes.
Dans le cas où il y a des soustractions, on commence par les transformer en additions des opposés.

Exemple :
$E = (+4) + (-11) - (+3) - (-7)$
$E = (+4) + (-11) + (-3) + (+7)$
$E = 4 - 11 - 3 + 7$
$E = -3$

Propriété (Multiplication de nombres relatifs)
Pour multiplier deux nombres relatifs, on multiplie leurs distances à zéro et on applique la **règle des signes** suivante :

- le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif ;
- le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif.

Exemple :
- $F = (-4) \times (-2,5) = 4 \times 2,5 = 10$
- $G = 0,2 \times (-14) = -(0,2 \times 14) = -2,8$

Le produit de plusieurs nombres relatifs est
- *positif s'il comporte un nombre pair de facteurs négatifs ;*
- *négatif s'il comporta un nombre impair de facteurs négatifs.*

Exemple :
$H = -6 \times 7 \times (-8) \times (-9) = -(6 \times 7 \times 8 \times 9) = -3024$

Propriété (Division de nombres relatifs)
Pour calculer le quotient d'un nombre relatif par un nombre relatif non nul, on divise leurs distances à zéro et on applique la règle des signes du produit

Exemple :
$I = \dfrac{-30}{-4} = 30 : 4 = 7,5$

N1.3 Nombres en écriture fractionnaire

N1.3.1 Définitions

Définition (Fraction)
Si le numérateur et le dénominateur d'une écriture fractionnaire sont entiers, alors cette écriture fractionnaire s'appelle **fraction**.

Propriété (Fractions égales)
Deux fractions sont **égales** quand leurs numérateurs et dénominateurs sont proportionnels.
Autrement dit, pour tous nombres a, b et k où b et k sont non nuls : $\dfrac{a \times k}{b \times k} = \dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{a : k}{b : k} = \dfrac{a}{b}$

Définition (Fraction irréductible)
Simplifier une fraction c'est trouver une fraction égale ayant un dénominateur (entier) plus petit.
Une **fraction irréductible** est une fraction simplifiée le plus possible. Autrement dit, une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemple :
$J = \dfrac{15}{21} = \dfrac{3 \times 5}{3 \times 7} = \dfrac{5}{7}$
On a simplifié la fraction $\dfrac{15}{21}$ et $\dfrac{5}{7}$ est une fraction irréductible.

N1.3.2 Opérations

Propriété (Additionner, soustraire des nombres en écriture fractionnaire)
Pour **additionner (ou soustraire)** des nombres en écriture fractionnaire **ayant le même dénominateur**,
- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs,
- on garde le dénominateur commun.

Autrement dit, pour tous nombres a, b et c où b est non nul : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$.

*Si les dénominateurs sont différents, on commence par **réduire au même dénominateur** en utilisant la propriété du N1.3.1.*

Exemple :
$K = \dfrac{7}{3} + \dfrac{6}{12} = \dfrac{7 \times 4}{3 \times 4} + \dfrac{6}{12} = \dfrac{28}{12} + \dfrac{6}{12} = \dfrac{28+6}{12} = \dfrac{34}{12} = \dfrac{17}{6}$

Propriété (Multiplier des nombres en écriture fractionnaire)
Pour **multiplier des nombres en écriture fractionnaire**, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
Autrement dit, pour tous nombres a, b, c et d où b et d sont non nuls : $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$.

En général, on commence par simplifier les fractions avant d'effectuer les calculs afin d'obtenir plus facilement une fraction simplifiée.

Exemple :
$L = \dfrac{4}{15} \times \dfrac{25}{16} = \dfrac{4 \times 25}{15 \times 16} = \dfrac{\cancel{4} \times \cancel{5} \times 5}{3 \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times 4} = \dfrac{5}{12}$

Définition (Nombres inverses)
Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Propriété (Inverse d'un nombre)
Tout nombre x non nul admet un inverse noté x^{-1} qui est le nombre $\dfrac{1}{x}$.
Tout nombre en écriture fractionnaire $\dfrac{a}{b}$ (avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$) admet un inverse qui est le nombre $\dfrac{b}{a}$.

- *Un nombre et son inverse ont toujours le même signe.*
- 0 *est le seul nombre qui n'admet pas d'inverse.*

Exemple :
- L'inverse de -2 est $-\dfrac{1}{2}$.
- L'inverse de $\dfrac{7}{2}$ est $\dfrac{2}{7}$.

Propriété (Diviser des nombres en écritures fractionnaires)
Diviser par un nombre **non nul** revient à multiplier par l'inverse de ce nombre.
Autrement dit, pour tous nombres a, b, c et d où b, c et d sont non nuls :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Exemple :

$$M = \frac{-\frac{32}{21}}{\frac{-48}{-35}} = -\frac{32}{21}\times\frac{35}{48} = -\frac{\cancel{2}\times 2\times\cancel{8}\times\cancel{7}\times 5}{3\times\cancel{7}\times\cancel{2}\times 3\times\cancel{8}} = -\frac{10}{9}$$

N1.4 Puissances

Définition (Puissance d'un nombre)

Pour tout nombre entier $n > 0$ et pour tout nombre relatif a : $\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ fois}} = a^n$.

Pour tout nombre entier $n > 0$ et pour tout nombre relatif a : $\dfrac{1}{\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ fois}}} = \dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$.

- *Par convention,* $a^0 = 1$
- *Pour tout entier* n*,* a^{-n} *est l'inverse de* a^n*, en particulier* $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

Exemple :

$$N = \frac{2^2\times 2^3}{2^7} = \frac{(2\times 2)\times(2\times 2\times 2)}{2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$$

Priorités opératoires :

Dans une expression sans parenthèses on effectue en priorités les puissances, puis les multiplications et les divisions, et en dernier les additions et les soustractions

Propriété (Calculs avec des puissances)

Pour tous les nombres a, b, n et p, les égalités suivantes sont toujours vraies :

- $a^n\times a^p = a^{n+p}$
- $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ avec $a\neq 0$
- $(a^n)^p = a^{n\times p}$
- $(a\times b)^n = a^n\times b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ avec $b\neq 0$

Ces règles de calcul peuvent être retrouvées en se ramenant à la définition.
Par exemple $a^n\times a^p = \underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ fois}}\times\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{p \text{ fois}} = \underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n+p \text{ fois}} = a^{n+p}$

Propriété (Puissances de 10)
Pour tout nombre $n > 0$: $10^n = 1\underbrace{0...0}_{n \text{ zéros}}$ $\quad 10^{-n} = 0,\underbrace{0...0}_{n \text{ zéros}}1$

Un nombre a plusieurs écritures. La notation scientifique est une convention d'écriture qui met l'accent sur les ordres de grandeur.

Définition (Notation scientifique)
Tout nombre décimal non nul peut être écrit en notation scientifique, c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul pour partie entière et où n est un nombre entier relatif.

N1.5 Racines carrées

Définition (Racine carrée d'un nombre)
Soit a un nombre positif. La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre positif dont le carrée est a.

Exemple :
$25 = 5^2$, on a alors $\sqrt{25} = 5$.

Propriété (Propriétés des racines carrées)
- Pour tout nombre positif a : $(\sqrt{a})^2 = a$.
- Pour tout nombre a : $\sqrt{a^2} = a$ si $a \geq 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a \leq 0$
- Pour tous les nombres positifs a et b, on a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- Pour tous les nombres positifs a et b $(b \neq 0)$, on a : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Attention :
$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ *et* $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$